Lektura:

Modelowanie: Coleman [3] str. 1-10; Bartholomew [1] 1.2-1.3.

Ł. M.: Schinazi [7] str. 1-7; J & Sz [4] str. 263-272;

Bartholomew [1] 2.1, 2.2: basic model;

Lektura dodatkowa

Coleman [3] str. 11-23; Bartholomew [2] 1. i 2.;

Kemeny i Snell [5] 2.1 - 2.3 i str. 193-193; J.O. [6] 2.1.

Plan:

1. Modelowanie matematyczne w socjologii.
2. Podstawy ł.M.: intuicja, proste przykłady, definicja.
3. Model 1: Ruchliwość społeczna.
4. Powtórka z Rachunku Prawdopodobieństwa.

1 Teoria

Krótki wstęp poniżej ma za zadanie przybliżyć pewne aspekty teorii łańcuchów Markowa. Jest on pomyślany jako dodatek i uzupełnienie do lektur podstawowych.

1.1 Łańcuchy Markowa

Co to jest "markowskość"? Pojęcie to odpowiada pewnej formie zapominania o przeszłości procesu. Dokładniej chodzi o to, że *przyszłość zależy od przeszłości jedynie poprzez teraźniejszość*, czyli że stany przyszłe procesu, przy ustalonym stanie teraźniejszym, nie zależą od przeszłości. Można też o tym myśleć tak: obserwując proces startujący z punktu x jeżeli kiedyś jeszcze, powiedzmy w momencie n_0, wrócimy do tego punktu x, to dalej będziemy widzieć taki sam proces jak od początku, czyli $(X_n)_{n\geqslant 1} \stackrel{d}{=} (X_n)_{n\geqslant n_0}$.

Ograniczymy się do łańcuchów Markowa, które przyjmują wartości w pewnym przeliczalnym zbiorze S. Będąc w stanie s mamy ciąg prawdopodobieństw, który opisuje nam możliwości przejść do innych stanów. Tak więc zachowanie się łańcucha w każdym kroku jest opisane macierzą stochastyczną (dla każdego możliwego stanu mamy wektor prawdopodobieństw). Mówimy, że łańcuch jest jednorodny jeżeli te macierze przejścia dla różnych momentów czasu są identyczne. Oznacza to, że mamy pewną macierz $P = P(s,t)_{s,t\in S}$ taką, że $\mathbb{P}(X_n = t|X_{n-1} = s) = P(s,t)$. Widać od razu, że taka macierz musi być stochastyczna, tj. wiersze sumują się do jedynki a elementy macierzy są nieujemne. Zwykle elementy S numerujemy liczbami naturalnymi. Elementy macierzy P oznaczamy także przez $P(s,t) = p_{st}$. Należy zwrócić uwagę na to, że w notacji, którą przyjęliśmy pierwszy jest podawany stan wyjściowy (numer wiersza), a drugi stan, do którego możemy się udać (numer kolumny). W niektórych opracowaniach przyjmowana jest konwencja odwrotna.

Zastanówmy się teraz jak się zachowuje nasz łańcuch po dwóch krokach. Wykorzystamy to, że "po drodze" musiał gdzieś być, zatem: $\mathbb{P}(X_n = t|X_{n-2} = s) = \sum_{u\in S} \mathbb{P}(X_{n-1} = u|X_{n-2} = s)\mathbb{P}(X_n = t|X_{n-1} = u) = \sum_{u\in S} P(s,u)P(u,t) = P^2(s,t)$. Analogicznie widzimy, że prawdopodobieństwa przejścia w n krokach odczytujemy jako elementy n-tej potęgi macierzy P.

Szczególną rolę odgrywa stan początkowy - zauważmy, że może on wpłynąć na to, że do niektórych stanów nigdy nie dotrzemy a do innych jedynie po pewnym okresie itd. Formalnie rzecz biorąc jednak stan początkowy to po prostu X_0 - zmienna losowa jak inne. Nie należy się więc dziwić, że czasem łańcuch Markowa nie będzie zaczynał z jednego wyznaczonego stanu ale z pewnego rozkładu prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów. Analizując zachowanie się łańcucha Markowa zwykle chcemy się dowiedzieć, które stany łańcuch odwiedza, czy robi to skończoną, czy nieskończoną liczbę razy? Ostatecznym celem zaś jest znalezienie rozkładu stacjonarnego, który opisywałby prawdopodobieństwa przebywania w danym stanie dla bardzo odległych czasów. Tymi problemami zajmiemy się za tydzień.

1.2 Przykłady

1. **Miotanie się.** Zacznijmy od prostego przykładu punktu miotającego się po prostej. Punkt porusza się ze stała prędkością jednak co minutę może zmienić kierunek. Powiedzmy, że z prawdopodobieństwem p zmienia kierunek (a z $(1-p)$ nie zmienia), wszystkie decyzje są niezależne od siebie. Za stan łańcucha uważamy kierunek poruszania się punktu. Opisz ten łańcuch.

2. **Błądzenie.** Kanonicznym przykładem jest błądzenie na prostej. Wyobraźmy sobie taką sytuację: stawiamy pionek na osi, w zerze i rzucamy nierzetelną monetą. Z prawdopodobieństwem p dostajemy orła, a z $(1-p)$ reszkę. W pierwszym przypadku przesuwamy pionek o jeden w prawo, w drugim o jeden w lewo. Powtarzamy to postępowanie. Opisz formalnie łańcuch i podaj macierz przejścia. Jakie jest, intuicyjnie rzecz biorąc, zachowanie takiego łańcucha?

3. **Błądzenie na okręgu.** W powyższym przykładzie możemy wprowadzić bariery, za które pionek nie może przejść. Bariery te mogą pionek "pochłaniać" lub na przykład odbijać. Możemy również pionek zapę-

tlić. Rozważmy następujący przykład: na okręgu mamy 5 punktów. W kolejnym kroku przesuwamy pionek w prawo z prawdopodobieństwem p a w lewo z prawdopodobieństwem $1-p$. Będąc w punkcie 4 pionek stanie z 0 z prawdopodobieństwem p a w 3 z p-stwem $1-p$. Napisz macierz przejścia.

4. **Dyfuzja - model Ehrenfestów.** Wyobraźmy sobie dwa naczynia: A i B, w których jest rozmieszczone k molekuł. W momencie n, losowo wybrana molekuła przenosi się ze swojego naczynia do sąsiedniego. Za stan układu uważamy ilość molekuł w naczyniu A. Jest to model zaproponowany przez P. i T. Ehrenfestów dla różnych problemów w mechanice statystycznej. Ma on również interpretację jako dyfuzja z siłą centralną. Opisać łańcuch.

5. **Proces gałązkowy.** Opiszemy teraz standardowy proces gałązkowy Bienayme-Galtona-Watsona. Opisuje on rozwój potomków jednego przodka (lub inaczej rozprzestrzenianie się nazwiska). Zakładamy, że każda osoba rodzi dzieci w sposób niezależny od pozostałych oraz, że liczba potomków jest zmienna losową z pewnego wspólnego rozkładu p-stwa na $\mathbb{N}$. W ten sposób jeżeli Z_n oznacza ilość potomków w n-tej generacji to mamy: $Z_0 = 1$ oraz
$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_i^n,$$
gdzie zmienne $(Y_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$ są niezależne i o tym samym rozkładzie. Proces ten można w wygodny sposób rysować jako rozrastające się (lub nie) drzewo. Ciekawe pytania dotyczą prawdopodobieństwa wymarcia linii genealogicznej (czyli $\mathbb{P}(\exists n > 0 : Z_n = 0) =?$), średniego czasu do wymarcia itp.

2 Zadania

1. Zrobić polecenia podane powyżej (sekcja 1.2).

2. Podaj przykład na to, że macierz przejścia nie jest wyznaczona jednoznacznie. Pokaż, że rozkład początkowy i macierz przejścia zadają łańcuch Markowa.

3. Niech S będzie przestrzenią stanów jednorodnego łańcucha Markowa (X_n) o pewnym rozkładzie początkowym i macierzy przejścia $P = P(s,t)$. Pokazać, że dla dowolnego s, $P(s,t)$ nie zależy od s wtedy i tylko wtedy, gdy X_n są niezależne. Co możemy powiedzieć o ich rozkładach?

4. (*)Dla przykładu miotania się, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w n-tym momencie cząstka porusza się w lewo (można udowodnić indukcyjnie wzór dany w J-Sz).

5. W nowoutworzonym kraju Bataków syn fryzjera zostaje fryzjerem w połowie przypadków, piekarzem w jednej czwartej przypadków a w pozostałej jednej czwartej jest szewcem. Syn piekarza nigdy nie zostanie fryzjerem. W jednej czwartej przypadków idzie śladami ojca a w trzech czwartych obiera zawód szewca. Syn szewca zawsze jest szewcem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wnuk fryzjera zostanie piekarzem? Jak będzie wyglądał rozkład zawodów w tym kraju po wielu latach?

6. (*) W pewnej nieskończonej populacji szaleje zaraźliwa choroba WGB. Osoba nią zarażona zaraża losową ilość osób (której rozkład jest Poissona z parametrem), a następnie sama ginie. Początkowo jest chorych k osób. Znaleźć prawdopodobieństwo, że choroba wyginie (w zależności od). *Zauważmy że to jest model procesu gałązkowego BGW.*

Literatura

[1] D. Bartholomew. *Stochastic Models for Social Processes.* Wiley, London, 2nd edition, 1973.

[2] D. Bartholomew. Applications of stochastic processes to social phenomena. In K. Szaniawski, editor, *Problems of Formalization in the Social Sciences*, pages 177–202. PAN, 1977.

[3] J. Coleman. *Foundations of Social Theory.* The Belknap Press fo Harvard University Press, Cambridge, Mass and London, UK, 1990.

[4] J. Jakubowski and R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieńśtwa.* Script, Warszawa, 2nd edition, 2001.

[5] J. Kemeny and J. Snell. *Finite Markov Chains.* D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1960.

[6] J. Obłój. Normy społeczne i kontrola zachowań w ujęciu dedukcyjnym. Master's thesis, IS UW, 2004.

[7] R. B. Schinazi. *Classical and Spatial Stochastic Processes.* Birkhäuser, Basel, 1999.